主　論　文　要　旨

No.1

報告番号	甲 乙 第　　　号	氏 名	高橋　優太

主論文題名：

On Gentzen's Three Consistency Proofs for Arithmetic

(算術の無矛盾性に対するゲンツェンの三つの証明について)

（内容の要旨）

20 世紀前半のドイツの論理学者 G・ゲンツェンは，初等数論の無矛盾性に対して，すなわち，互いに矛盾する主張が初等数論の中で導出不可能であることに対して，三つの証明を与えた．彼は，この探究を D・ヒルベルトから引き継いだ．ヒルベルトは，19 世紀後半から 20 世紀初頭にかけて，数学の基礎を巡る問題に多大な貢献を与えたドイツの数学者である．ヒルベルトが取り組んだ問題の中の一つに，初等数論と解析学の無矛盾性を証明するという問題があった．

本論文は，ゲンツェンが初等数論に与えた三つの無矛盾性証明について論じる．まず，本論文の背景となるヒルベルトの業績を説明しよう．

1900 年に出版された論文において，ヒルベルトは公理的方法(die axiomatische Methode)を提案した．公理的方法とは，数学理論の基礎づけのための方法であり，次のような手順を含む：まず，当の数学理論の公理系を提示し，そして，その公理系の無矛盾性を示す．ヒルベルトは，ここでの無矛盾性をこう説明した．ある公理系が無矛盾であるのは，互いに矛盾する主張が公理からの有限ステップの推論によって導出されることがありえないときである．

1900 年に開催されたパリ国際数学者会議において，ヒルベルトは 23 もの問題を提示した．その中の二番目の問題として，解析学の無矛盾性を直接証明せよという問題が提起された．つまり，解析学の公理系の無矛盾性を，他の数学理論の無矛盾性に還元することなく示せというものである．

1920 年代に入ると，ヒルベルトは，初等数論および解析学の無矛盾性を証明するために，有限の立場(der finite Standpunkt)を導入した．おおまかにいえば，有限の立場とは，記号に対する有限的な操作についての推論および原理のみを許容する立場である．この立場においては，自然数は数記号と同一視され，後続者関数は，数記号の右側に記号「'」を結びつける操作として捉えられる．さらに，有限の立場が許容する帰納法は制限された形になっており，有限の立場のもとで無矛盾性が証明されるべき数学理論が含む帰納法とは厳密に区別される．この点は，無矛盾性証明のためには帰納法を用いる必要があるためそれは循環論法にならざるをえないという H・ポアンカレの批判に応えるものとなっている．

初等数論および解析学の無矛盾性を証明するためのヒルベルトのアイデアは

こうである．ヒルベルトは，初等数論・解析学の公理系を，記号操作規則の集まりである形式体系として提示し，この体系の中で 0=1 という記号列が導出されえないことを有限の立場のもとで証明することを目指した．このプログラムは現在ヒルベルト・プログラムと呼ばれている．

ヒルベルト学派のさまざまな部分的成果にもかかわらず，1931 年に公表された K・ゲーデルによる不完全性定理は，ヒルベルト・プログラムが修正なしでは実現不可能であることを示した．インフォーマルにいえば，不完全性定理は次を示した．解析学の形式体系である 2 階算術がもし無矛盾であるならば，その無矛盾性は，拡張することなしには有限の立場において証明不可能である．初等数論の形式体系である 1 階算術についても同様のことが成り立つ：1 階算術がもし無矛盾であるならば，その無矛盾性は，拡張がなされない限り有限の立場のもとでは証明できない．

ゲンツェンによる 1 階算術の無矛盾性証明は，ゲーデルの不完全性定理以降の成果に属する．ゲンツェンは有限の立場を拡張して自身の立場を提示し，そのもとで 1 階算術の無矛盾性を証明した．彼は，量化子を含まない述語に対するε_0までの超限帰納法でもって有限の立場を拡張し，1 階算術の無矛盾性を示した．

前述のように，ゲンツェンは，初等数論の形式体系である 1 階算術に対して三つの無矛盾性証明を与えた．一つ目の証明を含んだ論文は 1935 年に提出されたが，P・ベルナイスの批判によりゲンツェンは論文を取り下げた．その結果，ゲンツェンの死後の 1974 年にその論文は出版されることとなった. 二つ目の証明と三つ目の証明は，1936 年と 1938 年にそれぞれ出版された．三つ目の証明において用いられた方法は，1 階算術の証明論における基本テクニックとなったカット除去法である．以下では，一つ目・二つ目・三つ目の証明をそれぞれ 1935 年証明・1936 年証明・1938 年証明と呼ぶことにする．

本論文は特に，ゲンツェンによる 1 階算術の論理式の解釈，すなわち，ゲンツェンによるそれらの論理式への意味の割り当てについて論じる．ゲンツェンは，この解釈を 1935 年証明と 1936 年証明の中で与えた．それは以下のようになる．

> 論理式 A が正しいのは，還元手続き(Reduziervorschrift)が式$\rightarrow A$ に対して付与可能であるとき，そのときに限る．

インフォーマルに述べれば，還元手続きが式$\rightarrow A$ に対して付与可能であるとは，式$\rightarrow A$ を公理に書き換える手続きとその手続きが停止することの証明の両方が得られているということである．このことは，式$\rightarrow A$ の正しさを検証する手続きが与えられていることを表す．ここで注目すべきは，ゲンツェンは，論理式 A が

正しいのはどんなときかを説明することを通して論理式に意味を付与したという点である.

次の点にも注意したい. ゲンツェンは, 自身が与えた論理式の解釈を有限的(finit)とみなした. そして, 自然数全体から成る無限列を完結したものとみなすような古典的解釈を, 自身の解釈で置き換えようとした. そうすることで, 1 階算術の各論理式が, 有限的に描写されうる事態を表現するようになることを目指したのである.

本論文の各々の章の内容を手短に述べよう. 第 1 章では, 本論文の背景および各章の概要が説明される.

第 2 章は, ゲンツェンによる算術的論理式の解釈と, 無矛盾性証明の意義を巡るヒルベルト・ブラウワー論争との関係について論じる. L・E・J・ブラウワーは, 20 世紀初頭の数学基礎論においてヒルベルト学派と対立したブラウワー学派の創始者で, 彼の立場は直観主義(intuitionism)と呼ばれる.

ブラウワーは, ヒルベルト学派が追い求める従来の数学の無矛盾性証明には意義がないと論じた. ブラウワーによれば, たとえそこには矛盾が含まれないとしても, 従来の数学は誤った方法に基づいているため内容が付随していない. 従来の数学は, 内容を欠いた記号を操作する単なるゲームであり, 実質的な認識の拡張は直観主義数学によって得られるとした.

ゲンツェンは, こうした反論に対して, 自身による算術的論理式の解釈でもって応答した. この解釈を与える 1935 年証明と 1936 年証明は, 1 階算術の無矛盾性を単に示すだけでなく, その定理に有限主義的意味をあたえるものとみなした.

第 2 章の目的は, 1935 年証明がもつこの側面を探究することである. まず, なぜゲンツェンは上述のブラウワーの反論を深刻に受け止めそして応答したのかを説明する. 次に, ゲンツェンからの応答にとって重要な 1935 年証明の主要補題を直観主義的方法で証明し, ゲンツェンが 1 階算術の各論理式に付与した意味は直観主義者にとっても許容可能であると論じる.

第 3 章では, ゲンツェンによる算術的論理式の解釈を, 含意論理式の解釈という観点から考察する. 含意の解釈は, 数学基礎論において繰り返し現れる主題であり, 例えばヒルベルトおよびベルナイスがそれについて論じた. ゲンツェンもまた, この主題を取り扱った. 彼は, ある含意解釈を提示し, それが循環を含んでいることを指摘した. そして, このような循環を回避できるような含意解釈を与えることが, 1935 年証明および 1936 年証明の主要目的の一つと主張した. しかし, ゲンツェンは含意論理式に対して間接的な解釈しか与えなかったし, その解釈が循環を回避していることの議論はそもそも与えなかった.

第 3 章の目的は，テイトによる 1935 年証明の定式化を応用することで，直接的な含意解釈をゲンツェン的立場から与え，そしてこの解釈が，ゲンツェンにより指摘された循環を回避できると主張することである．

最後に，第 4 章では，ゲンツェンによる算術的論理式の解釈と，無矛盾性証明に見られる二つの正しさの概念との関係について論じる．近年ジークは，ゲンツェンの未公刊の遺稿を精査し，ゲンツェンが二種類の無矛盾性証明を区別していたことを明らかにした．一つ目の，内容的な正しさを示す無矛盾性証明(以下では「内容的無矛盾性証明」と呼ぶ)とは，論理式が正しいのはどんなときかを定義し，体系のどの定理もその意味で正しいことを示す証明のことである．後述するように, ゲンツェンによる論理式の解釈を用いることで進む 1935 年証明はこの種の無矛盾性証明にあたる. 二つ目の, 形式的な正しさを示す無矛盾性証明(以下では「形式的無矛盾性証明」と呼ぶ)とは，体系で証明可能な等式すべてに正規的な証明図を割り当てる証明のことである．正規的証明図が正しい結論をもつことは有限ステップで検証できることから，無矛盾性が導かれる．そして，ジークは，ゲンツェンが 1936 年証明をこれらの中間に位置づけたという説明を与えた. この説明は次のような問いを提起する．1936 年証明は，先に述べた意味で，内容的無矛盾性証明でも形式的無矛盾性証明でもあるのだろうか．もしそうであるならば，1936 年証明の中のその二つの側面はどのように関係しているのだろうか.

第 4 章の目的は，これら二つの問いに答えることである．まず，1935 年証明と 1938 年証明について，前者は内容的無矛盾性証明であり，後者は形式的無矛盾性証明であると論じる．そして，1936 年証明の主要補題からは，1935 年証明の主要補題および 1938 年証明の主要補題がともに導かれることを示すことで, 一つ目の問いに肯定的に答える．すなわち，1936 年証明は内容的無矛盾性証明でも形式的無矛盾性証明でもある．続けて，ここまでの議論をもとに，二つ目の問いには次のように答える : 1936 年証明がもつ内容的無矛盾性証明としての側面は，その形式的無矛盾性証明としての側面によって形成されている．1936 年証明においては，正規的証明図を得るための構文論的操作を通して，1 階算術の各定理の正しさが検証されるのである.

以上が各々の章の概要である．本論文の議論全体から分かることとしては，次が挙げられる．1 階算術に対する史上初めての証明となった 1935 年証明には，第 2 章および第 3 章で見るような概念的役割が見いだされる. 三番目の 1938 年証明においては，証明論の基本テクニックとなった，技術的に洗練されたカット除去法が用いられたが, この方法と先の概念的役割との間に結びつきがあることが第 4 章の議論より判明する．中間にある 1936 年証明を精査することで，このことを明らかにすることができる.

Keio University

Thesis Abstract

No.1

Registration Number:	□ "KOU" □ "OTSU" No. *Office use only	Name:	Yuta Takahashi

Title of Thesis: On Gentzen's Three Consistency Proofs for Arithmetic (算術の無矛盾性に対するゲンツェンの三つの証明について)

Summary of Thesis:

In the 1930s, Gerhard Gentzen provided three proofs for the consistency of first-order arithmetic, which showed that no contradictory results are derivable in the theory. Gentzen, in the first proof, gave an interpretation to first-order arithmetical formulas from his finitist standpoint: He assigned a sense to each arithmetical formula from that standpoint. This interpretation constituted the method of the first proof. On the other hand, the technique employed by him for the third proof was the cut elimination method, which became a standard technique of proof theory of first-order arithmetic. Gentzen conceived the second proof in an intermediate way between the first and the third.

In this thesis, we discuss the two remarkable roles of Gentzen's interpretation of arithmetical formulas and their relation to the cut elimination method. First, we argue that Gentzen's interpretation of arithmetical formulas took on the role of responding to a Brouwer-style objection to the significance of consistency proofs. By using some intuitionistic notions and principles, we show that Gentzen's first consistency proof provided each classically derivable formula with a sense that is also admissible for intuitionists. Second, we formulate a Gentzen-style interpretation of implication formulas and explain that this interpretation avoids the circularity of implication urged by Gentzen. His interpretation played the role of interpreting implication formulas without circularity. Then, we show that Gentzen's interpretation of arithmetical formulas can also be provided by the technique employed for Gentzen's second consistency proof, which is a generalization of the cut elimination method. This means that a generalization of the cut elimination method can fulfill the foregoing two roles of Gentzen's interpretation, so we obtain a connection between some aims of Gentzen's research in 1935 and a result that he reached in 1938.